# Correction

**Exercice I : circuit RL**

I.1.a Exprimer les tensions aux bornes des deux dipôles $u_L(t)$ et $u_R(t)$ en fonction du courant $i(t)$.

$$\begin{aligned} u_R &= Ri \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

I.1.b
$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{E}{\tau}$$

D'après la loi des mailles :

$$E = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_R = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$$

Il vient donc en postant $\tau = \frac{L}{R}$ :

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{E}{\tau}$$

I.1.c

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1,5}{3} = 0,5\,\mathrm{s}$$

$\tau$ a la même dimension qu'un temps et s'exprime en secondes.
I.1.d
Solution de l'équation différentielle homogène (sans second membre) :

$$u_{RH} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Solution particulière l'équation différentielle :

$$u_{RP} = E$$

La solution générale est la somme des solutions homogène et particulière :

$$u_R = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

A $t = 0$ l'intensité est nulle donc $u_R(t = 0) = 0$. Donc la constante $A$ est égale à $-E$. On en decuit l'expression finale de $u_R$ :

$$u_R = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

I.1.e
La tangente à l'origine est :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}$$

La courbe possède une asymptote horizontale $u_R = E$.

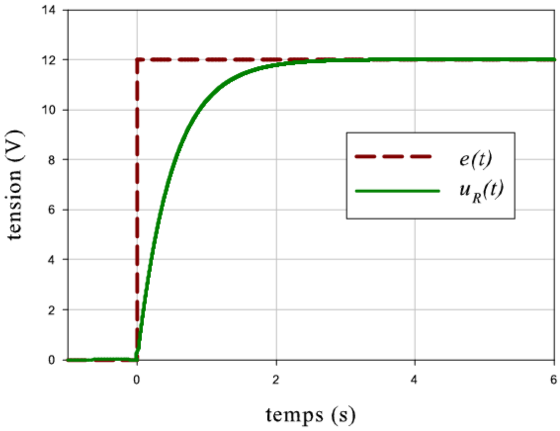


FIG. 3 –

Quand $t \longrightarrow \infty$, $u_R \longrightarrow E$ et $u_R \longrightarrow I = \frac{E}{R}$.

$$I = \frac{E}{R} = 4\,\mathrm{A}$$

I.1.f

L'intensité circulant dans la lampe est voisine de l'intensité nominale de la lampe ($5\,\mathrm{A}$). On observe un retard à l'allumage de la lampe qui brille ensuite quasi normalement (un peu moins que dans ses conditions nominales d'utilisation).

I.2

I.2.a

$$\begin{aligned} \underline{u}_R &= R\underline{I_M}e^{j\omega t} \\ \underline{u}_L &= j\omega L\underline{I_M}e^{j\omega t} \end{aligned}$$

I.2.b

L'impédance complexe est le rapport de l'amplitude complexe de la tension à l'amplitude complexe de l'intensité : $\underline{Z} = \frac{\underline{U_M}}{\underline{I_M}}$.

$$\begin{aligned} \underline{U_M}_R &= R\underline{I_M} \\ \underline{U_L}_L &= j\omega L\underline{I_M} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ \underline{Z}_L &= j\omega L \end{aligned}$$

I.2.c

D'après la loi des mailles :

$$e = u_L + u_R = R\underline{I_M}e^{j\omega t} + j\omega L\underline{I_M}e^{j\omega t} = (R + j\omega L)\,\underline{I_M}e^{j\omega t}$$

soit :

$$\underline{E_M}e^{j\omega t} = (R + j\omega L)\,\underline{I_M}e^{j\omega t}$$

et finalement :

$$\underline{I_M} = \frac{\underline{E_M}}{R + jL\omega}$$

I.2.d

$$\underline{I_M} = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\underline{I_M} = \frac{17}{\sqrt{3^2 + (1,5 \times 2\pi \times 50)^2}} = 36\,\mathrm{mA}$$

I.2.e

L'intensité est beaucoup plus faible que l'intensité nominale de la lampe . L'ampoule ne va pas briller.

**Exercice II : Mise en orbite d'un satellite géostationnaire**

II.1.

On se place dans la bace cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ lié à un point $M$ de l'espace caractérisé par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$. On pose $\rho = R_T. + h$. Le champ de gravitation est radial, dirigé vers le centre de la Terre $O$ :

$$\overrightarrow{G} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{\rho^2}\overrightarrow{e_\rho} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\overrightarrow{e_\rho}$$

II.2.

Le satellite est géostationnaire donc il doit rester à la verticale d'un même lieu dont le mouvement est circulaire uniforme autour de l'axe de rotation de la Terre. Il doit donc posséder dans le référentiel géocentrique la même vitesse de rotation que la Terre qui est constante. Le plan de l'orbite contient le centre de la Terre et est perpendiculaire à l'axe de rotation passant par les pôles : c'est le plan de l'équateur.

$$T_S = T_T = 86164\,\mathrm{s}$$

$$v_{S2} = \frac{2\pi\left(R_T + h_2\right)}{T_T} = 3,08 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$$

II.3.

La force de gravitation dérive de l'énergie potentielle de gravitation : $\overrightarrow{F_G} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p$ :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\rho} = \mathcal{G}\frac{m_S M_T}{\rho^2}$$

d'où :

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{\rho} + \mathrm{cte}$$

L'énergie potentielle est nulle à l'infini, donc $\mathrm{cte} = 0$.

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h)}$$

L'énergie cinétique du satellite est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} m_S v_{S2}^2$$

L'énergie mécanique est la somme des énergies potentielle et cinétique :

$$E_{m2} = -\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h_2)} + \frac{1}{2} m_S v_{S2}^2 = -18,896 \times 10^9 + 9,46 \times 10^9 = -9,46 \times 10^9 \text{ J}$$

II.4.

dans la base circulaire :

$$\begin{cases} a_\rho & = & \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi & = & \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \end{cases}$$

Si la vitesse de rotation est constante : $\ddot{\varphi} = 0$ :

$$\begin{cases} a_\rho & = & \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi & = & 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \end{cases}$$

Dans cette même base :

$$\overrightarrow{F_G} = -\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h)^2}\overrightarrow{e_\rho}$$

soit d'après la relation fondamentale de la dynamique $m_S\overrightarrow{a_S}/\mathcal{R} = \overrightarrow{F_G}$ :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 & = & -\mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} & = & 0 \end{cases}$$

La vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est constante alors $\dot{\rho} = 0$ car $2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$ et $\rho$ est constant. Le mouvement est circulaire et uniforme. L'altitude est constante. Pour que les satellites restent à la même altitude, ils doivent décrivent un mouvement circulaire et uniforme.

II.5.

On a donc :

$$\rho\dot{\varphi}^2 = \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

soit :

$$\frac{v_S^2}{R_T + h} = \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

On en déduit que :

$$v_S = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T + h}}$$

$$v_{S1} = 7,56 \times 10^3 \text{m/s}$$

$$v_{S2} = 3,08 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Plus l'altidude est élevée, plus la vitesse linéaire est faible.

II.6. L'énergie mécanique est la somme des énergies potentielle et cinétique :

$$E_{m1} = -\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h_1)} + \frac{1}{2} m_S v_{S1}^2 = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h_1)} = -57,1 \times 10^9 \text{ J}$$

II.7. Le moteur orbital émet un jet de gaz quand le satellite est au périgée $P$ et à l'apogée $A$ de l'orbite de transfert. Déterminer la durée de fonctionnement du moteur orbital lors du transfert sachant que la puissance constante fournie par le moteur orbital est $P = 10\,\mathrm{MW}$.

Le moteur orbital doit fournir une énergie égale à la variation d'énergie mécanique $\Delta E_m = 47,67 \times 10^9$ J. La durée de fonctionnement du moteur est donc $\Delta t = \frac{\Delta E_m}{P} = 4,76 \times 10^2\mathrm{s} = 476\,\mathrm{s}$

II.8.

Sur l'orbite géostationnaire l'énergie du satellite en fin de vie dont la masse n'est plus que $m_S = 1000\,\mathrm{kg}$ est :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h_2)} = -4,721 \times 10^9 \text{ J}$$

Sur l'orbite cimetière :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_S M_T}{(R_T + h)} = -4,688 \times 10^9 \text{ J}$$

Le moteur doit fournir $33 \times 106\,\mathrm{J}$ pour porter le satellite sur son orbite cimetière alors qu'il lui faudrait fournir $4,721 \times 10^9$ J pour le sortir de l'attraction terrestre (dans ce cas l'énergie du satellite doit être au moins nulle). Comme il est en fin de vie et que ses réserves de carburant comburant sont faibles, il est préférable de le placer sur une orbite proche de l'orbite géostationnaire.